

Непрерывность

1. Докажите, что в шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась бы в промежутке от 0 до 9.
2. В ряд выложено 2025 белых и 2025 чёрных шариков. Самый левый и самый правый шарики – белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них окажется поровну чёрных и белых.
3. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 записаны $+1$ и -1 , причем сумма всех чисел не больше 100 и не меньше -100 . Докажите, что в таблице можно выделить квадрат 25×25 , сумма чисел в котором не больше 25 и не меньше -25 .
4. Матч «Батэ»–«Динамо» закончился со счетом $5 : 3$ в пользу «Динамо». Докажите, что в некоторый момент «Динамо» уже забило столько мячей, сколько еще оставалось забить «Батэ» до конца матча?
5. На книжной полке в произвольном порядке стоит двадцатитомное собрание сочинений. Назовем *беспорядком* пару томов (не обязательно соседних), в которой том с большим номером стоит левее тома с меньшим номером. Для каждой расстановки томов подсчитали количество всех беспорядков. Найдите все полученные числа.
6. Есть 100 различных монет, половина из которых – фальшивые. За один ход разрешается разделить монеты на две кучки. Докажите, что можно сделать 25 ходов так, что в некоторый момент в кучках было поровну настоящих либо фальшивых (может и тех, и других) монет.
7. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника на плоскости существует прямая, делящая пополам и его площадь, и периметр.
8. Докажите, что существуют 2025 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 25 простых чисел.
9. На окружности отметили вершины правильного n -угольника. В вершины расставили целые числа так, что разность между соседними не больше 1. Для каждой стороны в середину дуги, которую она стягивает, записали полусумму чисел, стоящих в вершинах. При каких n точно найдутся диаметрально противоположные точки, в которых стоят равные числа?
10. В противоположных углах квадратной доски со стороной 2 м сидели два жука. Не слезая с доски они поменялись местами. Докажите, что когда-то расстояние между жуками было равно 2025 мм.
11. На плоскости отметили по 2025 синих и красных точек общего положения. Докажите, что есть прямая, в каждой из полуплоскостей относительно которой синих и красных точек поровну (но не нуль).
12. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.